Л. Б. Ермолаева (Казань)

РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ ОСЦИЛЛИРУЮЩИХ ФУНКЦИЙ

Исследуется краевая задача

$$Ax \equiv x^{(m)}(t) + B(x;t) = y(t), \quad -1 \le t \le 1, \quad m+1 \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

$$R_k(x) = 0, \quad k = \overline{1,m}, \quad x \in C^{m-1}[-1,1], \tag{2}$$

где B — данный непрерывный (в том числе интегро-дифференциальный) оператор из пространства $X = W_2^m(\rho;[-1,1])$ в пространство $Y = L_2(\rho;[-1,1]$, $\rho = \rho(t) = (1-t^2)^{1/2}$, $y(t) \in Y$ — данная функция, а R_k — данные линейно независимые функционалы в пространстве $C^{m-1}[-1,1]$ (при $m = 0$ условия (2) отсутствуют). Приближенное решение задачи (1) — (2) ищется в виде многочлена

$$x_n(t) = \sum_{k=1}^{n+m} \alpha_k t^{k-1}, \quad \alpha_k \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{3}$$

коэффициенты которого определяются из условий

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} A(x_n;t)\,dt = \int_{t_{i-1}}^{t_i} y(t)\,dt, \; i = \overline{1,n}, \; t_r \in [-1,1];$$

$$R_k(x_n) = 0, \; k = \overline{1,m}.$$

Теорема. *Пусть выполнены условия:* а) $B : X \to Y$ *есть вполне непрерывный оператор;* б) *задача* (1) – (2) *имеет единственное решение* $x^* \in X$ *при любой правой части* $y \in Y$; в) *узлы определены по любой из формул*

$$t_r = \cos\frac{r\pi}{n}, \quad t_r = \cos\frac{2r+1}{2n+2}\pi, \quad r = \overline{0,n}. \tag{4}$$

Тогда для всех $n \in \mathbb{N}$, *начиная с некоторого, коэффициенты многочлена* (3) *определяются однозначно и* $x_n(t) \to x^*(t)$, $n \to \infty$, *в пространстве* X *со скоростью*

$$\|x^* - x_n\|_X = O\{E_{n-1}(x^{*(m)})_Y\}, \tag{5}$$

где $E_n(\varphi)_Y$ – наилучшее приближение функции $\varphi \in Y$ алгебраическими многочленами степени не выше n в пространстве Y.

Следствие. *В условиях теоремы метод осциллирующих функций является оптимальным по порядку* [1] *среди всевозможных прямых методов решения задачи* (1) – (2), *позволяющих построить приближенное решение в виде многочлена* (3).

ЛИТЕРАТУРА

1. Габдулхаев Б. Г. *Оптимальные аппроксимации решений линейных задач.* Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1980. – 232 с.

Ю. Б. Ермолаев (Казань)

О ПРОПОРЦИОНАЛЬНОСТИ ЛИЕВЫХ СЛОВ В КЛАССИЧЕСКИХ АЛГЕБРАХ ЛИ

Пусть R — (приведенная) корневая система ранга r, $\Pi = \{\alpha_1, ..., \alpha_r\}$ — ее некоторая подсистема простых корней и $R = R^+ \cup R^-$ — разбиение R на отрицательную и положительную части относительно Π (см. [1]). Алгебру Ли L^+ над произвольным полем K назовем *алгеброй типа* R^+, если она имеет разложение

$$L = \bigoplus_{\alpha \in R^+} L_\alpha,$$

удовлетворяющее условиям:

1) $\dim L_\alpha \geq 1 \quad \forall \alpha \in R^+$.

2) $[L_\alpha, L_\beta] \subseteq L_{\alpha+\beta} \quad \forall \alpha, \beta \in R^+ \quad ([L_\alpha, L_\beta] = 0$, если $\alpha + \beta \notin R)$.

3) $\dim L_i = 1$ и L порождена подпространством $\oplus_{i=1}^r L_i$, где $L_i = L_{\alpha_i}$, $i = 1, ..., r$.

Аналогично, используя R^-, определяем алгебру Ли L^- типа R^- над K. Последовательность $a = (i_1, i_2, ..., i_m)$, $1 \leq i_s \leq r$, назовем *правильным путем*, если $\alpha_{i_1} + \cdots + \alpha_{i_s} \in R$ для всякого $s = 1, ..., m$. Индекс i_t в a назовем особым, если $(\alpha_{i_1} + \cdots + \alpha_{i_{t-1}} | \alpha_{i_t}) = 0$.